

Задача А. Стенания Сипчика

1 Решение на 40 баллов

Для решения задачи на 40 баллов можно написать два цикла и честно «построить стену».

2 Полное решение

Для полного решения заметим, что первый и четвертый, седьмой и так далее ряды (если они есть) будут повторяться, так как каждый ряд смещается на треть кирпича, поэтому достаточно посчитать их количество только для первых трех рядов.

Для начала посчитаем количество кирпичей, которые мы вообще не будем ломать при строительстве стены. В первом ряду их будет $\lfloor \frac{w}{s} \rfloor$, во втором ряду — $\lfloor \frac{w-\frac{s}{3}}{s} \rfloor$, а в третьем — $\lfloor \frac{w-2\frac{s}{3}}{s} \rfloor$. Четвертый и последующие ряды будут повторяться, поэтому достаточно считать только для первых трех. Аналогично можно посчитать остаток, который необходимо заполнить кусками.

Чтобы каждый раз не делить на три, можно ширину стены и кирпича изначально домножить на три, на ответ это никак не повлияет.

Таким образом считаем количество целых кирпичей в стене, также считаем сколько нужно заполнить кусками, делим на ширину кирпича и получаем ответ на задачу.

Так как кирпичи можно ломать сколько угодно, то в целом не важно сколько кирпичей мы вообще ломать не будем, можно посчитать суммарную длину рядов и поделить её на ширину кирпича, то есть $\lceil \frac{n*W}{s} \rceil$.

Задача В. Сипчик ищет пары

Рассмотрим все возможные случаи:

- $k = 1$, любая пара чисел подходит, значит ответ $\lfloor n/2 \rfloor$.
- $k = 2$, подходят пары чисел, составленные из четных чисел и пары из двух нечетных, значит ответ $\lfloor cnt_{even}/2 \rfloor + \lfloor cnt_{odd}/2 \rfloor$.
- $k = 3$, подходят пары чисел, составленные из чисел кратных 3 и пары из чисел с остатками от деления на 3 равными 2 и 1, значит ответ $\lfloor cnt_{0mod3}/2 \rfloor + \min(cnt_{1mod3}, cnt_{2mod3})$.

Задача С. Формульное безумие

3 Решение для $n < 10^2$

Решение за $O(N^3)$, где мы перебираем 3-мя форами все переменные получало от 4 до 8 баллов

4 Решение для $n < 10^3$

Решение за $O(N^2)$, где мы перебираем 2-мя форами переменные y и z , а переменную x проверяем подходит ли она получало до 20 баллов.

5 Решение для $n < 10^4$

Предыдущее решение можно было оптимизировать: найти максимальные значения y и z , а так же найти нужные границы по четности.

6 Полное решение

Предположим что мы набрали какое-то число мест по 5, тогда нам требуется посчитать количество разбиений остатка на места по 2 и 4 места. Допустим этот остаток четный (иначе бы мы не смогли его разбить), тогда количество мест по 4 варьируется от 0 до $\lfloor \frac{ost}{4} \rfloor$, где ost это сколько мест осталось распределить, а значит количество вариантов будет $\lfloor \frac{ost}{4} \rfloor + 1$.

Тогда мы получаем решение за $O(N)$, перебираем коэффициент при z и считаем кол-во вариантов x и y с помощью формулы.

Задача D. Фибоначчи много не бывает

7 Решение на 30 баллов

Для получения 30 баллов достаточно по указанной в условии формуле просчитать первые n чисел Фибоначчи, затем выбрать кратные k . Потребуется работа с длинными числами, т.е. целесообразно использовать язык программирования Python.

Все числа сохранять не требуется, просчитаем до k -го числа, запомним его, а после будем последовательно получать числа Фибоначчи и проверять на делимость на k -е.

8 Полное решение

Полное решение основано на следующем свойстве чисел Фибоначчи.

Если n делится на m , то f_n делится на f_m . Короткое доказательство этого свойства можно провести методом математической индукции. Ознакомиться с доказательством можно скачав книгу "Числа Фибоначчи. Николай Николаевич Воробьев, М.: Наука, 1978. 144 с." Из серии "Популярные лекции по математике, выпуск 6" доступна по ссылке <https://math.ru/lib/plm/6>.

Случай $m = 2$ следует обработать отдельно.

Решение на 30 баллов и вычислительные эксперименты с ним также могут натолкнуть на эту гипотезу.

Задача E. Сипчик тусует циферки

9 Решение на 10 баллов

Если число $x < 10$, то его запись состоит из одной цифры и достаточно пройти по списку и посчитать количество цифр, равных x .

10 Решение на 20 баллов

Если число $x < 100$, то его запись состоит из одной цифры или двух цифр, случай одной цифры уже рассмотрен, рассмотрим случай, когда запись x состоит из двух цифр.

Пусть запись числа x в десятичной системе счисления есть $x = ab_{10}$, тогда для двух последовательных цифр в списке цифр a_i и a_{i+1} должно выполняться либо $a = a_i$ и $b = a_{i+1}$ либо $b = a_i$ и $a = a_{i+1}$.

11 Полное решение

Остался случай $x = abc_{10}$. Самый простой способ сравнить два набора цифр это привести их к сортированному виду, т.е. рассмотрим срез из трех последовательных цифр списка $[a_i, a_{i+1}, a_{i+2}]$. Отсортируем его и сравним с сортированным списком $[a, b, c]$